



**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE SANTIAGO, UTESA**  
**SISTEMA CORPORATIVO**

**Reforma del presente con visión de futuro**  
**“Educando Para el Desarrollo Sociocultural”**

**SEDE – Santiago**

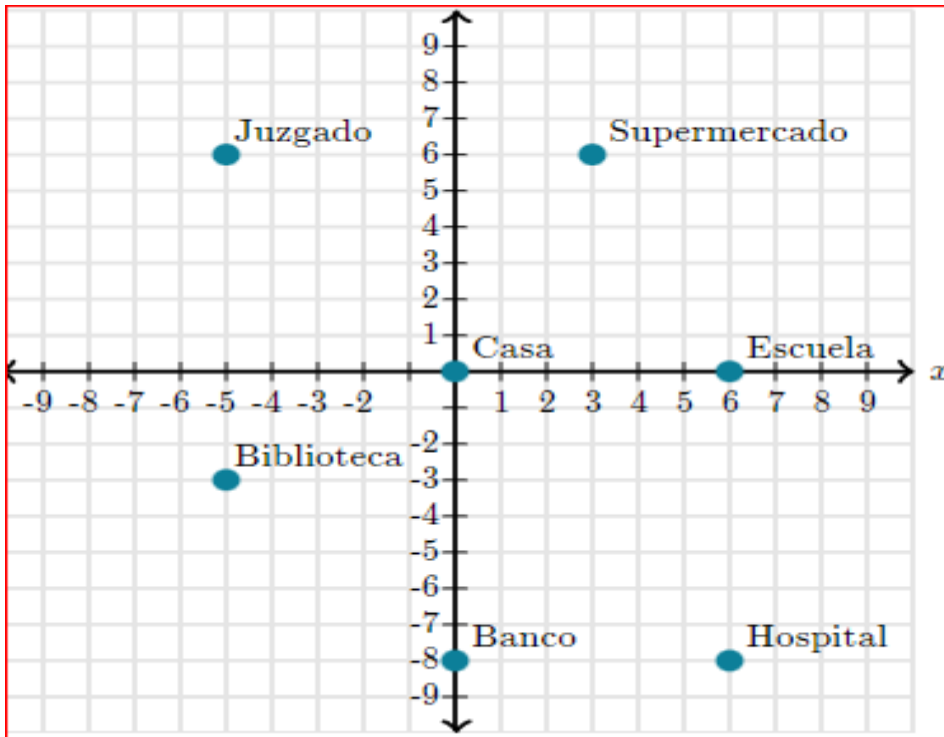
Departamento de Matemática

Pre – Calculo Mat 160

**Profesor:** Francisco Antonio Rodríguez Abreu M. A.

**Tercera Clase de Pre – Calculo**

1) Mabel graficó la ubicación de varios lugares de su pueblo en el plano coordenado que se muestra a continuación.



Determine si cada proposición sobre la gráfica de Mabel es verdadera o falsa.  
Proposición

La biblioteca está a 5 unidades del eje y. \_\_\_\_\_

La escuela se localiza en (0,6) \_\_\_\_\_

El supermercado está en (6, 3) \_\_\_\_\_

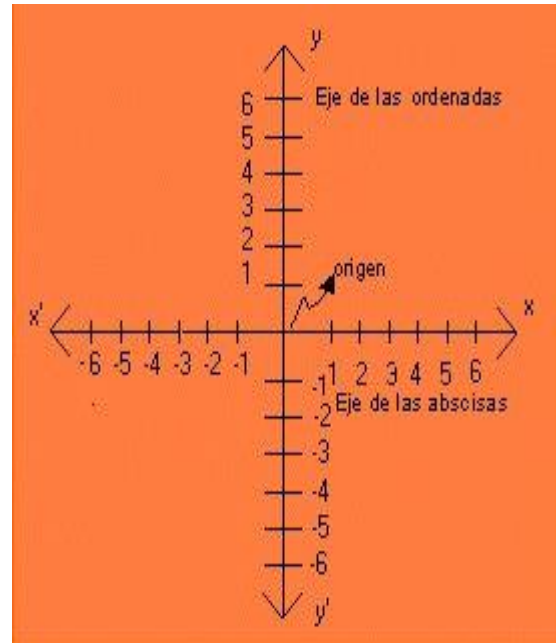
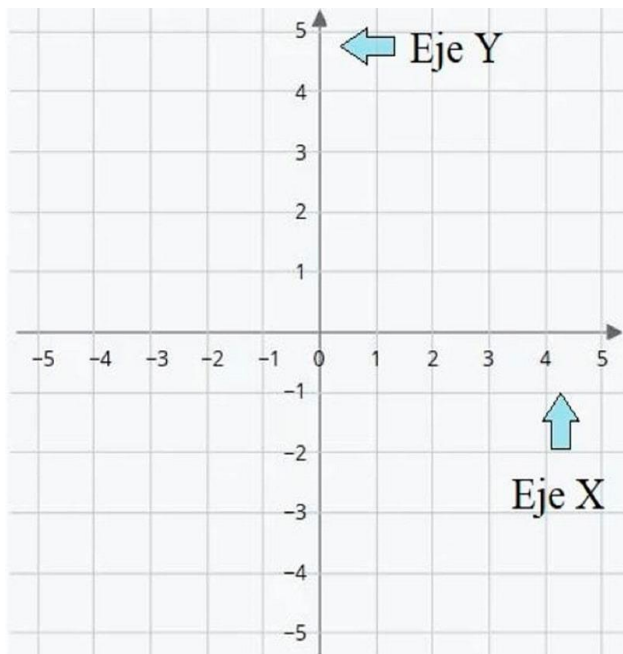
La distancia de la casa y el Hospital es de 10 unidades \_\_\_\_\_

## Sistema de Coordenadas Cartesianas

Un par ordenado de números reales  $(x, y)$  lo podemos representar en el plano en un sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares o plano  $xy$ .

Este sistema está constituido por dos rectas perpendiculares orientadas, llamadas ejes coordenadas y la intersección de ellas se llama origen.

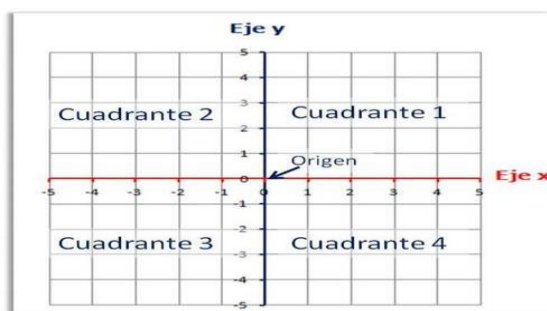
En la figura el eje horizontal es llamado eje  $x$  y el eje vertical es el eje  $y$ . Estos ejes dividen al plano en cuatro partes llamadas primer, segundo, tercer y cuarto cuadrante, denotados por I, II, III, IV respectivamente.



Como ya hemos dicho un par ordenado de números reales  $(x, y)$  lo podemos representar mediante un punto  $P$  en este plano. El número “ $x$ ” se llama abscisa o coordenada  $x$  del punto y el número “ $y$ ” se conoce como la ordenada o coordenada  $y$  del punto. Para graficar se procede como sigue. Se localiza el número “ $x$ ” en el eje (real)  $x$  y se traza una perpendicular al eje, igual se procede con el número “ $y$ ” en el eje  $y$ . La intersección de estas dos rectas es un punto en el plano  $X$  y  $Y$  es la representación del par  $(x, y)$ . Recíprocamente, podemos ver que cada punto  $P$  en el plano representa a un par de números reales ordenados.

El **plano cartesiano** es como un mapa formado por dos rectas numéricas llamadas **ej**es. Estos ejes se intersecan o se cruzan formando un ángulo recto (90 grados).

Los ejes son: **eje de las  $x$**  y el **eje de las  $y$** . Los ejes dividen el plano en cuatro partes llamadas **cuadrantes**.

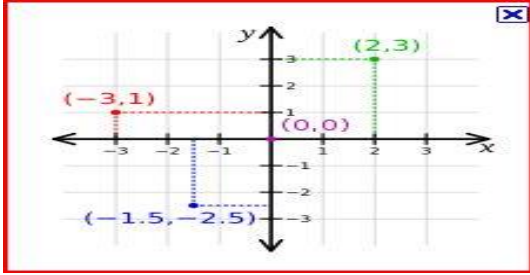


En los pares ordenados numéricos, las componentes pueden ser números enteros, decimales o fraccionarios; y todos ellos se encuentran en el plano cartesiano, así como en la recta numérica.

Como ejemplo el par  $(2.5; -3.5)$  se encuentra en el IV cuadrante, el punto  $(-1.5, -2.5)$  se encuentra en el III cuadrante.

### Ejemplo:

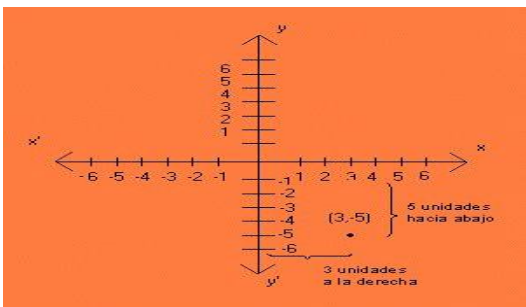
Al representar los puntos  $(0, 0)$ ,  $(2, 3)$ ;  $(-3, 1)$ ;  $(-1.5, -2.5)$  en el plano cartesiano se obtiene:



Este procedimiento también se emplea cuando se requiere determinar las coordenadas de cualquier punto que esté en el plano cartesiano.

Determinar las coordenadas del punto M.

Las coordenadas del punto M son  $(3, -5)$ .



De lo anterior se concluye que:

Para determinar las coordenadas de un punto o localizarlo en el plano cartesiano, se encuentran unidades correspondientes en el eje de las x hacia la derecha o hacia la izquierda y luego las unidades del eje de las y hacia arriba o hacia abajo, según sean positivas o negativas, respectivamente.

### Ejercicios:

1) Indique en que cuadrante del sistema de coordenadas cartesianas x y, o en que eje se encuentran los siguientes puntos:

a) A  $(4, -3)$

b) B  $(-3, 7)$

c) C  $(0, 6)$

d) D  $(-5/2, 7/2)$

2) Represente los siguientes puntos en el plano cartesiano, (Puede ubicarlo en un solo plano si lo desea):

A (- 3,1)

B (4,- 3)

C (- 4,1)

D (- 4, - 5)

E (0,0)

F (- 7,0)

G (0, 4)

3) Si el eje  $x$  es la mediatriz del segmento cuyos puntos extremos son  $P_1(5,3)$  y  $P_2$ . ¿Cuáles son las coordenadas de  $P_2$ ?

4) Determine las coordenadas de los puntos simétricos a  $M(6, - 4)$  respecto a los ejes  $x$  e  $y$  en el plano cartesiano.

## Distancia entre dos puntos

El profesor para la búsqueda del tesoro da las siguientes indicaciones a sus estudiantes:

Inicien en el árbol ubicado en  $(-5, -2)$  y caminen a la derecha hasta una gruta que está en  $(3, -2)$ , luego sigan hacia el norte hasta un pozo que está en  $(3, 4)$  y, finalmente, caminen con dirección Sur – este hasta el punto  $(7, 2)$  donde encontraran el tesoro escondido.

Después de hacer todo el recorrido

a) ¿A qué distancia se encontraran con el árbol?

b) ¿Cuál será la distancia total recorrida por cada uno de los estudiantes hasta encontrar el tesoro?

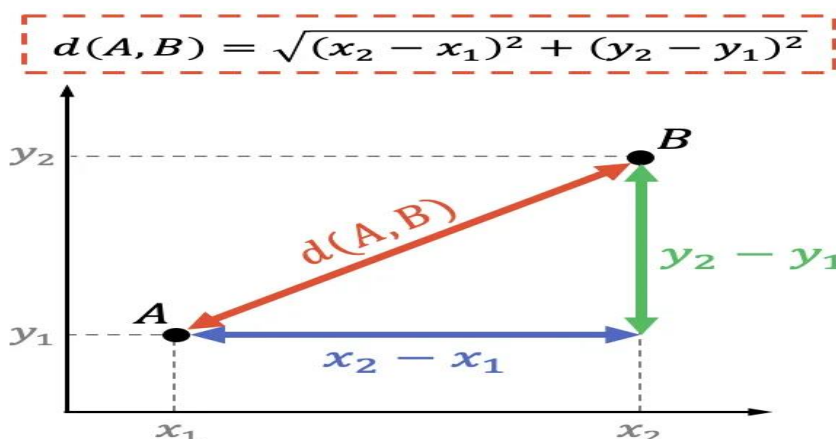


El Plano cartesiano se usa como un sistema de referencia para localizar puntos en un plano. Otra de las utilidades de dominar los conceptos sobre el Plano cartesiano radica en que, a partir de la ubicación de las coordenadas de dos puntos es posible calcular la distancia entre ellos. Cuando los puntos se encuentran ubicados sobre el eje  $x$  (de las abscisas) o en una recta paralela a este eje, la distancia entre los puntos corresponde al valor absoluto de la diferencia de sus abscisas ( $x_2 - x_1$ ). Cuando los puntos se encuentran ubicados sobre el eje  $y$  (de las ordenadas) o en una recta paralela a este eje, la distancia entre los puntos corresponde al valor absoluto de la diferencia de sus ordenadas ( $y_2 - y_1$ ).

Cuando los puntos se encuentran ubicados sobre el eje  $x$  o en una recta paralela a este eje, la distancia entre los puntos corresponde al valor absoluto de la diferencia de sus abscisas. Ejemplo: **La distancia entre los puntos  $(-4, 0)$  y  $(5, 0)$  es  $4 + 5 = 9$  unidades.**

La distancia entre dos puntos es igual a la longitud del segmento que los une. Por lo tanto, en matemáticas, para determinar la distancia entre dos puntos diferentes se deben calcular los cuadrados de las diferencias entre sus coordenadas y luego hallar la raíz de la suma de dichos cuadrados.

Dadas las coordenadas de dos puntos distintos:  $A(x_1, y_1)$  y  $B(x_2, y_2)$  entonces la distancia entre esos dos puntos se obtiene con la fórmula:



El teorema de Pitágoras dice que el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente a la suma de los cuadrados de sus catetos, por lo tanto:

$$(d(A, B))^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Y para obtener la fórmula solo tenemos que despejar la distancia entre los 2 puntos:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Finalmente, cabe destacar que, si estuviéramos trabajando con puntos de 3 coordenadas, la fórmula de la distancia entre dos puntos en el espacio (en R3) sería la misma, pero añadiendo la coordenada Z:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Una vez hemos visto la definición de la fórmula de la distancia entre dos puntos, veamos ahora cómo determinar dicha distancia mediante un **ejemplo**:

- Halla la distancia entre los siguientes dos puntos:    A (- 1, 7)                    B (3, 4)

$$d(A, B) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (4 - 7)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(3 + 1)^2 + (-3)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{16 + 9}$$

$$d(A, B) = \sqrt{25}$$

$$d(A, B) = 5 \text{ unidades}$$

De modo que la distancia entre los dos puntos es igual a 5 unidades.

#### **Ejercicio 1**

1) Calcula la distancia entre los siguientes dos puntos: A (4, 2)      B (1, 5)

#### **Ejercicio 2**

2) Averigua la distancia entre los siguientes dos puntos: A (8, 6)      B (- 4, 1)

#### **Ejercicio 3**

3) Calcular la distancia entre el siguiente par de puntos: A (- 5, - 1)      B (3, 5)

#### **Ejercicio 4**

4) Hallar la distancia entre los puntos P<sub>1</sub> (- 5, 5)      P<sub>2</sub> (4, -7)

#### **Ejercicio 5**

5) Hallar la distancia entre los puntos A: (5, 4) B: (- 6, 4)

#### **Ejercicio 6**

6) ¿Cuál es la distancia entre los puntos (2, 1) y (6, 4) en el plano cartesiano?

### Ejercicio 7

7) Si es que tenemos los puntos (3, 5) y (8, 10), ¿cuál es la distancia en el plano cartesiano?

### Ejercicio 8

8) Determina la distancia entre los puntos (8, 4) y (6, 10).

### Ejercicio 9

9) Si es que tenemos los puntos (-4, -2) y (4, 7), ¿cuál es su distancia?

### Ejercicio 10

10) ¿Cuál es la distancia en el plano cartesiano de los puntos (-5, -7) y (-2, 1)?

## El punto medio

El punto medio es un punto que se ubica exactamente en la mitad de un segmento de línea que une a dos puntos. Por ejemplo, si es que tenemos dos puntos y los unimos con un segmento de línea, el punto medio se ubicará en la mitad de ese segmento y será equidistante a ambos puntos.

### Fórmula para el punto medio de un segmento

La fórmula para el punto medio de un segmento es derivada usando las coordenadas de los puntos extremos del segmento. El punto medio es igual a la mitad de la suma de las coordenadas en x de los puntos y a la mitad de las coordenadas en y de los puntos.

Entonces, si es que tenemos los puntos A y B con las coordenadas A ( $x_1$ ,  $y_1$ ) y B ( $x_2$ ,  $y_2$ ), la fórmula del punto medio es:

$$p_m = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

### Ejemplo 1

Encuentra el punto medio de un segmento que une a los puntos A (2, 5) y B (6, 9).

$$p_m = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$p_m = \left( \frac{2 + 6}{2}, \frac{5 + 9}{2} \right)$$

$$p_m = \left( \frac{8}{2}, \frac{14}{2} \right)$$

$$p_m = (4, 7) \text{ Este es el punto medio de A y B}$$

### Ejemplo 2

¿Cuál es el punto medio de un segmento que une a los puntos A (4, 7) y B (9, 10)?

$$p_m = \left( \frac{4 + 9}{2}, \frac{7 + 10}{2} \right)$$

$$p_m = \left( \frac{13}{2}, \frac{17}{2} \right) \text{ Este es el punto medio de A y B}$$

O

$$p_m = (6.5, 8.5) \text{ Este es el punto medio de A y B}$$

### Ejemplo 3

Los puntos extremos de un segmento son (P, 4) y (8, 10). Encuentra el valor de **P** si es que el punto medio es (3, 7).

Escribimos las coordenadas dadas:

$$(x_1, y_1) = (P, 4)$$

$$(x_2, y_2) = (8, 10)$$

Ahora, podemos aplicar la fórmula del punto medio con los valores conocidos:

$$p_m = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$p_m = \left( \frac{P + 8}{2}, \frac{4 + 10}{2} \right)$$

En este caso, tenemos que encontrar el valor de **P** que es parte de las coordenadas x del punto medio.

Entonces, solo consideramos al componente x, formamos una ecuación y resolvemos para **P**. Sabemos que la coordenada en x del punto medio es 3, por lo que tenemos:

$$\left( \frac{P + 8}{2} \right) = 3$$

$$P + 8 = 6$$

$$P = -2 \text{ Entonces el valor de } \mathbf{P} \text{ es } -2.$$



## Ejercicios

1) Si tenemos los puntos  $(-4, -2)$  y  $(6, 5)$  unidos por un segmento, ¿cuál es su punto medio?

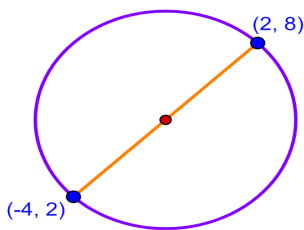
2) ¿Cuál es el punto medio entre los puntos  $(2, 6)$  y  $(8, 12)$ ?

3) Determina el punto medio entre los puntos  $(5, 7)$  y  $(9, 13)$ .

4) Encuentra el punto medio si es que tenemos los puntos  $(-5, -6)$  y  $(6, -2)$ .

5) Tenemos los puntos  $(p, -2)$  y  $(8, 10)$ . Encuentra el valor de  $p$  si es que el punto medio es  $(2, 4)$ .

6) El diámetro de un círculo tiene los puntos extremos  $(-4, 2)$  y  $(2, 8)$ . ¿Cuáles son las coordenadas del centro del círculo?



7) Escoge una respuesta

a) Un segmento está unido por los puntos  $(1, 3)$  y  $(9, 11)$ , ¿cuál es su punto medio?

M =  $(4,6)$

M =  $(4,7)$

M =  $(5,7)$

M =  $(5,9)$

b) Determina el punto medio del segmento unido por los puntos  $(3, -3)$  y  $(9, 11)$ .

M =  $(5,6)$

M =  $(6,4)$

M =  $(5,4)$

M =  $(6,8)$

c) Determina el punto medio entre los puntos  $(-1, -3)$  y  $(5, 7)$ .

M =  $(1,1)$

M =  $(1,2)$

M =  $(2,1)$

M =  $(2,2)$

d) ¿Cuál es el punto medio de un segmento que une a los puntos  $(-4, -7)$  y  $(6, -1)$ ?

M =  $(1, -4)$

M =  $(2, -2)$

M =  $(1, -3)$

M =  $(1, -1)$

e) Determine el punto medio de un segmento definido por los puntos (1, 5) y (9, 11)

$$M = (4, 7)$$

$$M = (5, 8)$$

$$M = (5, 9)$$

$$M = (6, 9)$$

f) Un segmento es definido por los puntos  $(-3, -5)$  y  $(7, 13)$ . Encuentra su punto medio.

$$M = (2, 4)$$

$$M = (2, 5)$$

$$M = (3, 5)$$

$$M = (3, 6)$$

g) Un segmento está definido por los puntos  $(P, 3)$  y  $(5, 13)$ . Si es que el punto medio es  $(1, 8)$ , ¿cuál es el valor de  $p$ ?

$$P = -1$$

$$P = 1$$

$$P = -3$$

$$P = -4$$

h) Si es que tenemos los puntos  $(-7, -2)$  y  $(-1, 18)$ , ¿cuál es su punto medio

$$M = (-3, 7)$$

$$M = (-2, 8)$$

$$M = (-4, 7)$$

$$M = (-4, 8)$$

## Relaciones y Funciones

1) La compañía telefónica de David le cobra 10 dólares mensuales de cuota y 0.05 dólares por cada minuto de llamada.

a) Calcular la función que proporciona el coste de la factura mensual de David en función del número de minutos de llamada.

b) ¿Cuál sería el coste de un mes en el que ha realizado 50 minutos de llamada? ¿Y si son 150 minutos?

c) Si la factura del mes de junio fue de 20 dólares, ¿cuánto minutos de llamada realizó David?

**Variable** es costumbre representarla mediante alguna de las últimas letras del alfabeto, con la característica de que puede sustituirse en su lugar cualquier número real.

**Constante** es un valor real que permanece fijo en cualquier problema de aplicación matemática.

### Definición:

Una relación en los reales es una regla de correspondencia que asocia a cada número real “ $x$ ” de un conjunto de partida  $A \subseteq \mathbb{R}$  (llamado Dominio de la relación) uno o más números reales “ $y$ ” de un conjunto de llegada  $B \subseteq \mathbb{R}$  (llamado Contradominio).

El papel que juegan las representaciones en la construcción del conocimiento es fundamental, de ahí que una relación puede tener varias representaciones, en forma verbal, algebraica, numérica o de tabla y gráfica. Para ilustrar esto, se utiliza el mismo ejemplo en cada representación:

### 1) En forma verbal:

Se describe la relación en lenguaje materno lo más precisa posible para poderla escribir, como por ejemplo, “un número real “  $y$  ” es igual al cuadrado de otro número “  $x$  ” más una unidad”.

### 2) En forma de ecuación algebraica:

$$y = x^2 + 1$$

### 3) En forma numérica o de tabla:

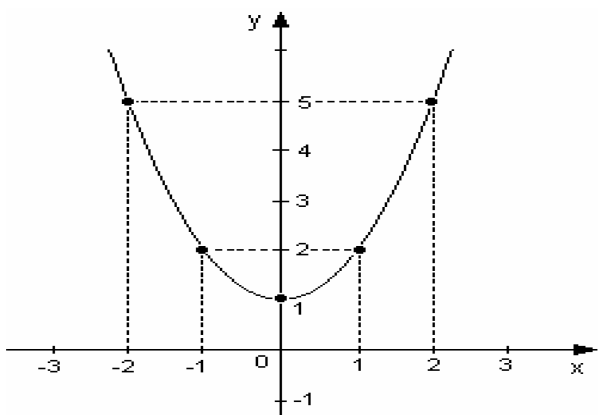
Es un arreglo que puede ser en forma horizontal o vertical y en donde en el primer renglón o primera columna, se ubican algunos valores reales del primer número “  $x$  ” y en el segundo renglón o columna se ubican los valores del número “  $y$  ” (que con la ayuda del inciso 2) se puede obtener).

|     |    |    |   |   |   |
|-----|----|----|---|---|---|
| $X$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $Y$ | 5  | 2  | 1 | 2 | 5 |

|     |     |
|-----|-----|
| $x$ | $y$ |
| -2  | 5   |
| -1  | 2   |
| 0   | 1   |
| 1   | 2   |
| 2   | 5   |

**Nota:** Por facilidad de cálculo se usaron en este caso sólo algunos números enteros, pero debe tenerse presente que los valores asignados a “  $x$  ” pueden ser cualquier número real, y además, una tabla solo nos proporciona una parte de la relación.

**5) En forma gráfica:** En esta representación, puede aplicarse el método que consiste en aprovechar los resultados de los incisos 2) y 3) anteriores, localizando sobre el plano cartesiano los puntos obtenidos en la tabla del inciso 3) y uniéndolos con línea continua como se muestra, se obtiene un bosquejo de la relación, que sólo es una parte de la gráfica ya que entre mayor sea el número de puntos calculados en la tabla, el trazo de la gráfica será mejor. Algunas veces este método del punto puede conducir a errores si no son elegidos correctamente los valores que son asignados a la variable “  $x$  ”.



**Nota:** Se usa con mayor frecuencia cualquiera de las últimas tres representaciones y eventualmente la primera cuando se trata de resolver problemas.

## Función

Una función matemática es una relación que se establece entre dos conjuntos, a través de la cual a cada elemento del primer conjunto se le asigna un único elemento del segundo conjunto o ninguno. Al conjunto inicial o conjunto de partida también se lo llama dominio; al conjunto final o conjunto de llegada, se lo puede denominar recorrido.

Por lo tanto, dados un conjunto A y un conjunto B, una función es la asociación que se produce cuando a cada elemento del conjunto A (el dominio) se le asigna un único elemento del conjunto B (el recorrido).

Una regla de correspondencia de una función real de variable real generalmente se da por medio de una o más fórmulas matemáticas y se representa con  $f(x)$ .

El conjunto de partida A es el **dominio** de la función, el conjunto de llegada B se le llama **codominio** o **contradominio** y al conjunto de los elementos " $f(x)$ " de B se llama **rango** o **imagen** de la función.

### Notación:

Algunas formas de denotar algebraicamente la regla de correspondencia en una función, pueden ser las siguientes:  $y = f(x)$ ,  $(x, f(x))$ ,  $f: A \rightarrow B$ ,  $p = f(q)$ , etc.

En el orden, la simbología anterior se lee: "y es igual a f de x", "el conjunto de pares ordenados x, f de x", "f es una función de A en B", "p es función de q".

## $f(x)$

Al elemento genérico del dominio se lo conoce como variable independiente; al elemento genérico del recorrido, como variable dependiente. Esto quiere decir que, en el marco de la función matemática, los elementos del recorrido dependen de los elementos del dominio.

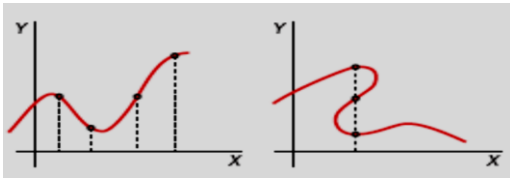
Tomemos el caso de un concurso de talentos cuyo jurado está formado por nueve especialistas. Las reglas del certamen establecen que cada integrante del jurado debe elegir como ganador a un participante, sin que exista la posibilidad de votar en blanco ni de escoger a más de uno. En la instancia final del concurso, hay dos finalistas. Con todos estos datos, podemos afirmar que existe una función que podemos llamar "elección", la cual asigna a cada miembro del jurado el finalista que seleccione. El conjunto inicial o dominio, de este modo, está formado por nueve elementos (cada uno de los jueces), mientras que el conjunto final o recorrido presenta dos elementos (los finalistas). La función "elección" hace que a cada uno de los jueces (elementos del dominio) le corresponda un único participante del concurso (elementos del recorrido).

No debemos olvidar que la función matemática no es algo exclusivo del ámbito científico, sino que, como bien se expresa en el ejemplo del concurso de talentos, se trata de un concepto que aplicamos de manera inconsciente en la vida cotidiana.

Por otra parte, una función matemática es la correspondencia o relación **f** de los elementos de un conjunto **A** con los elementos de un conjunto **B**. Una función cumple con la condición de existencia (todos los elementos de **A** están relacionados con los elementos de **B** y con la condición de unicidad (cada elemento de **A** está relacionado con un único elemento de **B**).

**Una función es una relación entre dos variables,  $x$  e  $y$ .**

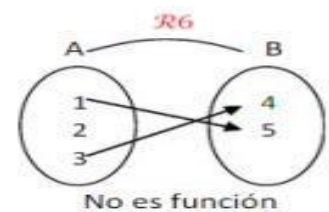
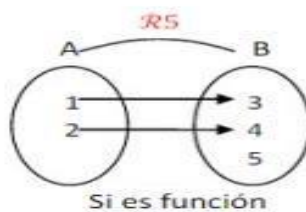
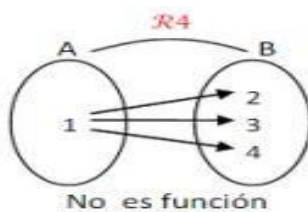
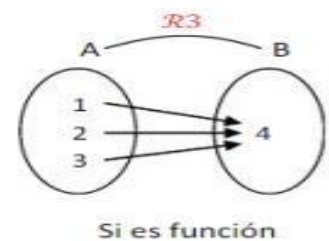
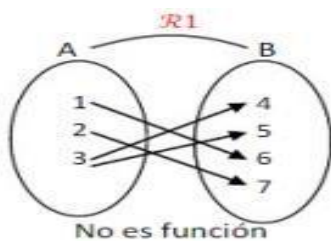
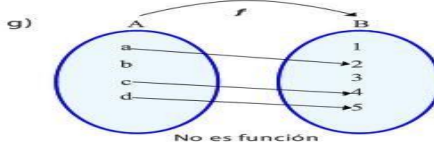
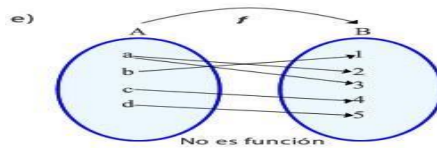
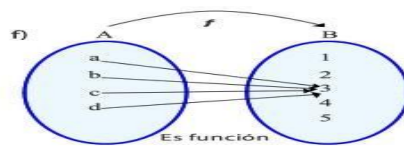
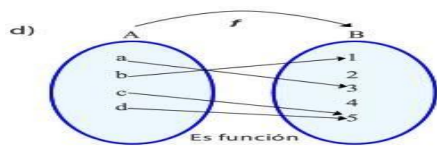
A cada valor de la  $x$  (variable independiente) le corresponde un único valor de  $y$  (variable dependiente). La función se representa gráficamente sobre los ejes cartesianos.



La primera gráfica corresponde a una función: a cada valor de  $x$  le corresponde un único valor de  $y$ . La segunda gráfica no es de una función: hay valores de  $x$  que les corresponde más de un  $y$ .

## OJO

Una función es una relación que asigna a cada valor de entrada un solo valor de salida. Toda función es relación, pero no toda relación es función.

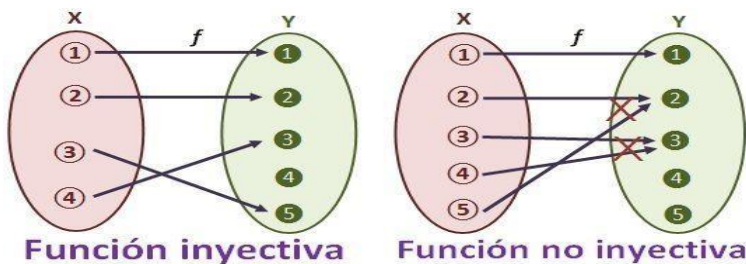


## Clasificación de las funciones:

**La inyectividad, sobreyectividad y biyectividad** dan información acerca de cómo se relacionan los elementos del conjunto inicial  $X$  con los elementos del conjunto final  $Y$ .

## Función inyectiva

La función  $f$  es inyectiva, si cada elemento del conjunto final  $Y$  tiene un único elemento del conjunto inicial  $X$  al que le corresponde. Es decir, no pueden haber más de un valor de  $X$  que tenga la misma imagen  $Y$ . Reciben también el nombre de funciones “uno a uno”. No siempre todos los elementos del conjunto final  $Y$  deben corresponderse con alguno del conjunto inicial  $X$ .



En términos matemáticos, una función  $f$  será inyectiva si dados dos puntos  $x_a$  y  $x_b$ :

Si  $f(x_a) = f(x_b)$  entonces  $x_a = x_b$

Dicho de otra manera: una función es inyectiva si se cumple que a valores de su dominio  $x_a \neq x_b \Rightarrow f(x_a) \neq f(x_b)$

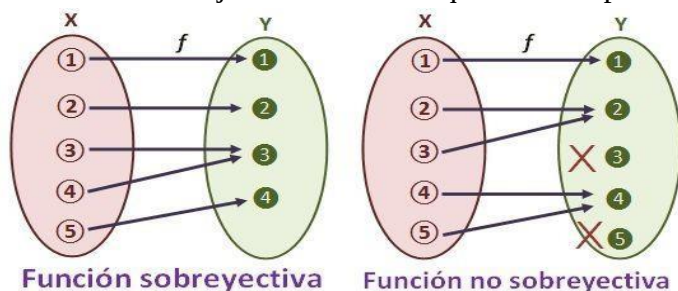
Una comprobación gráfica de la inyectividad de una función es cuando cualquier recta paralela al eje  $X$  corta a la misma, como máximo, en un punto.

## **Ejemplo de función inyectiva (vida real)**

Un ejemplo muy palpable de función inyectiva: asignemos a  $P$  al conjunto de presidentes de los Estados Unidos de América elegidos en el siglo XXI y a  $I$  el conjunto de las fechas de investidura presidenciales en USA también del siglo XXI. Sea  $f$  la función que relaciona cada uno de estos presidentes con la fecha de su primera toma de posesión. La función  $f$  es, por tanto, inyectiva pues a cada presidente le corresponde una única fecha de su primera toma de posesión. Aunque, por ejemplo, Barack Obama, aparte de la fecha de su primera investidura de 20 – 1 – 2009, fuese reelegido por segunda vez el 6 – 11 – 2012.

## Función sobreyectiva

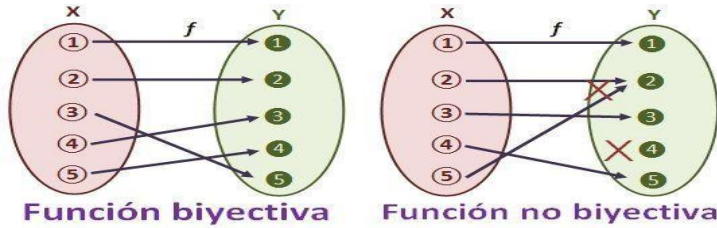
Una función  $f$  es sobreyectiva (o suprayectiva) si todo elemento del conjunto final  $Y$  tiene al menos un elemento del conjunto inicial  $X$  al que le corresponde.



Es decir, una función es sobreyectiva si el recorrido de la función es el conjunto final  $Y$ . Dicho de otra manera, una función es sobreyectiva cuando son iguales su recorrido y su dominio.

## Función biyectiva

Una función  $f$  es biyectiva si es al mismo tiempo inyectiva y sobreyectiva. Es decir, si todo elemento del conjunto final  $Y$  tiene al menos un elemento del conjunto inicial  $X$  al que le corresponde (condición de función sobreyectiva) y todos los elementos del conjunto inicial  $X$  tiene una única imagen en el conjunto final  $Y$  (condición de función inyectiva). Digamos que no puede quedarse ningún elemento en el conjunto final  $Y$  solo, sin asociarse con un único elemento del conjunto inicial  $X$ .



Teóricamente, una función  $f$  es biyectiva si

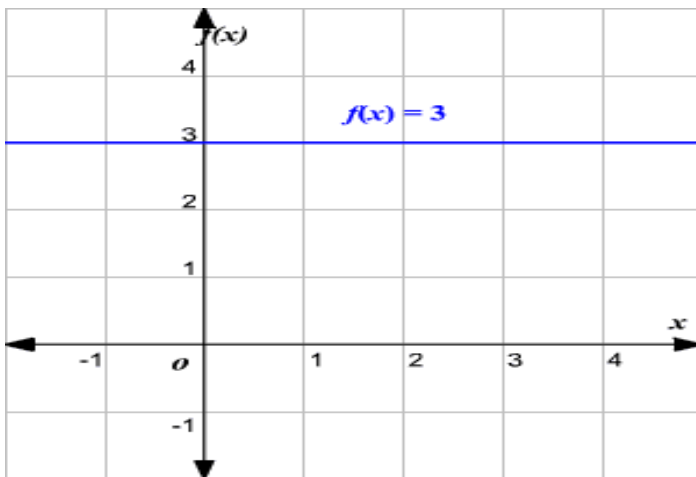
Para todo  $y$  de  $Y$ , existe un único  $x$  de  $X$  tal que  $f(x) = y$

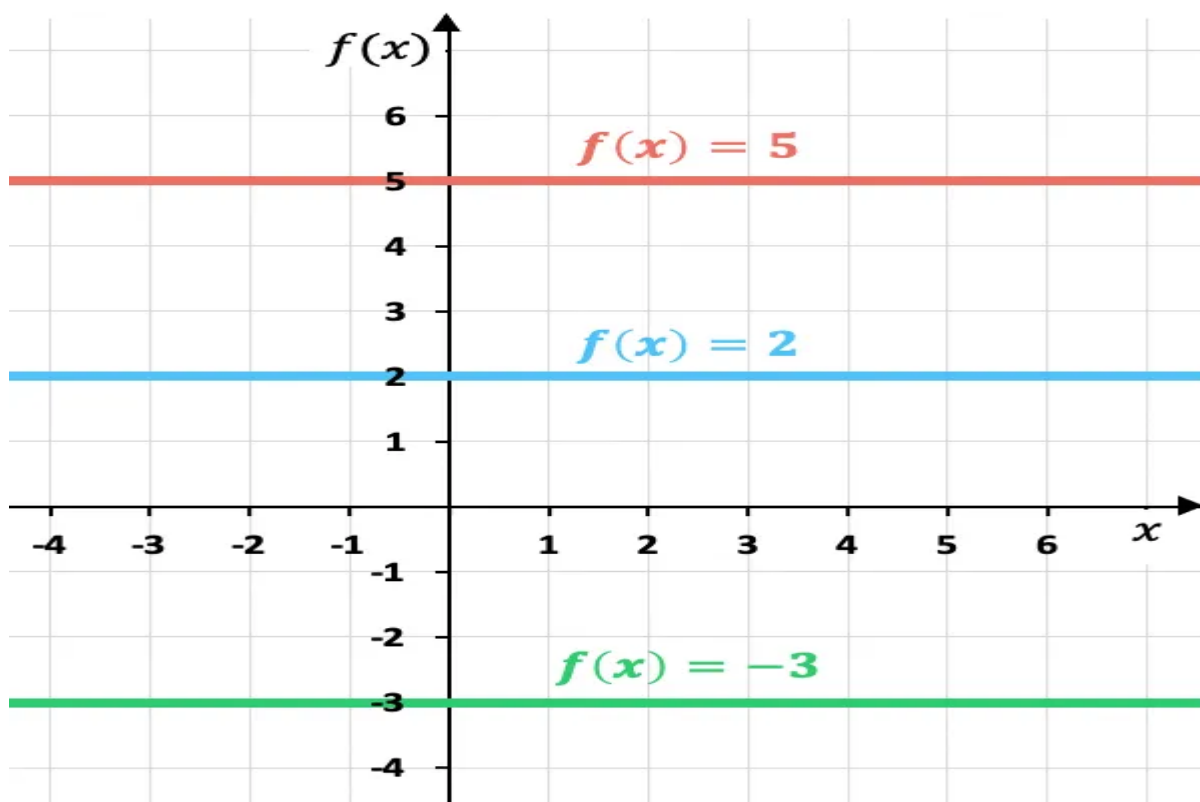
## Función constante

Una función constante es una función lineal por la cual el rango no cambia sin importar cual miembro del dominio es usado.

### **Ejemplo:**

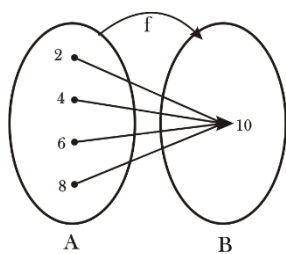
Grafique la función  $f(x) = 3$ .





<https://www.funciones.xyz/function-constante/>

La gráfica de una función constante es siempre una recta horizontal

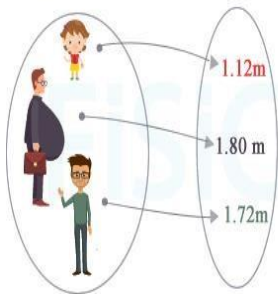


Otros ejemplos de funciones:





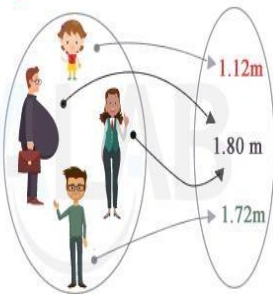
Función inyectiva



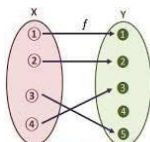
A cada persona su altura  
Dominio  $\rightarrow$  Recorrido



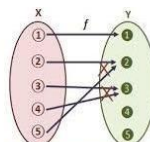
Función no inyectiva



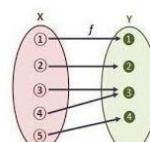
A cada persona su altura  
Dominio  $\rightarrow$  Recorrido



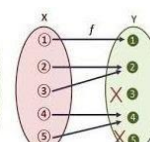
Función inyectiva



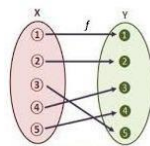
Función no inyectiva



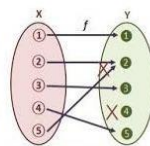
Función sobreyectiva



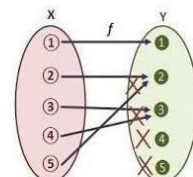
Función no sobreyectiva



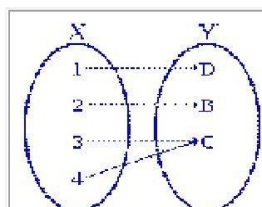
Función biyectiva



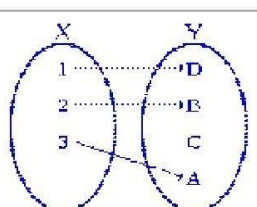
Función no biyectiva



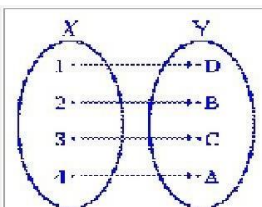
Función no inyectiva  
Función no sobreyectiva



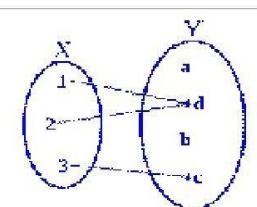
Sobreyectiva, no inyectiva



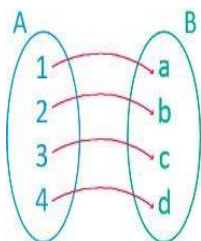
Inyectiva, no sobreyectiva



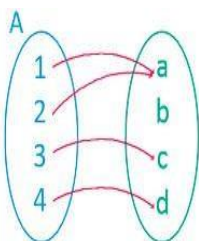
Biyectiva



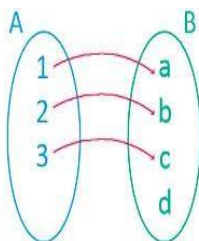
No sobreyectiva, no inyectiva



Si es inyectiva

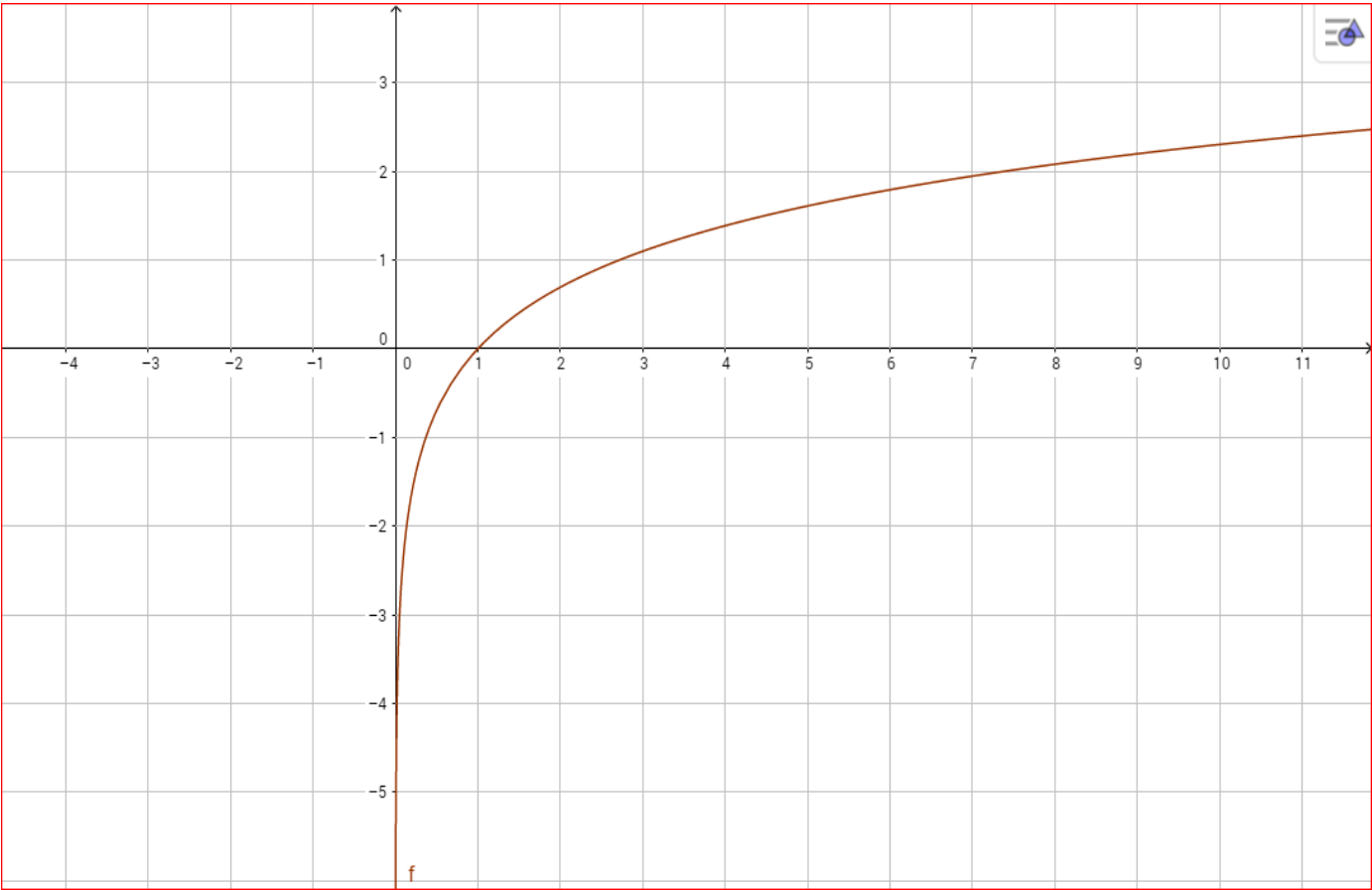


No es inyectiva

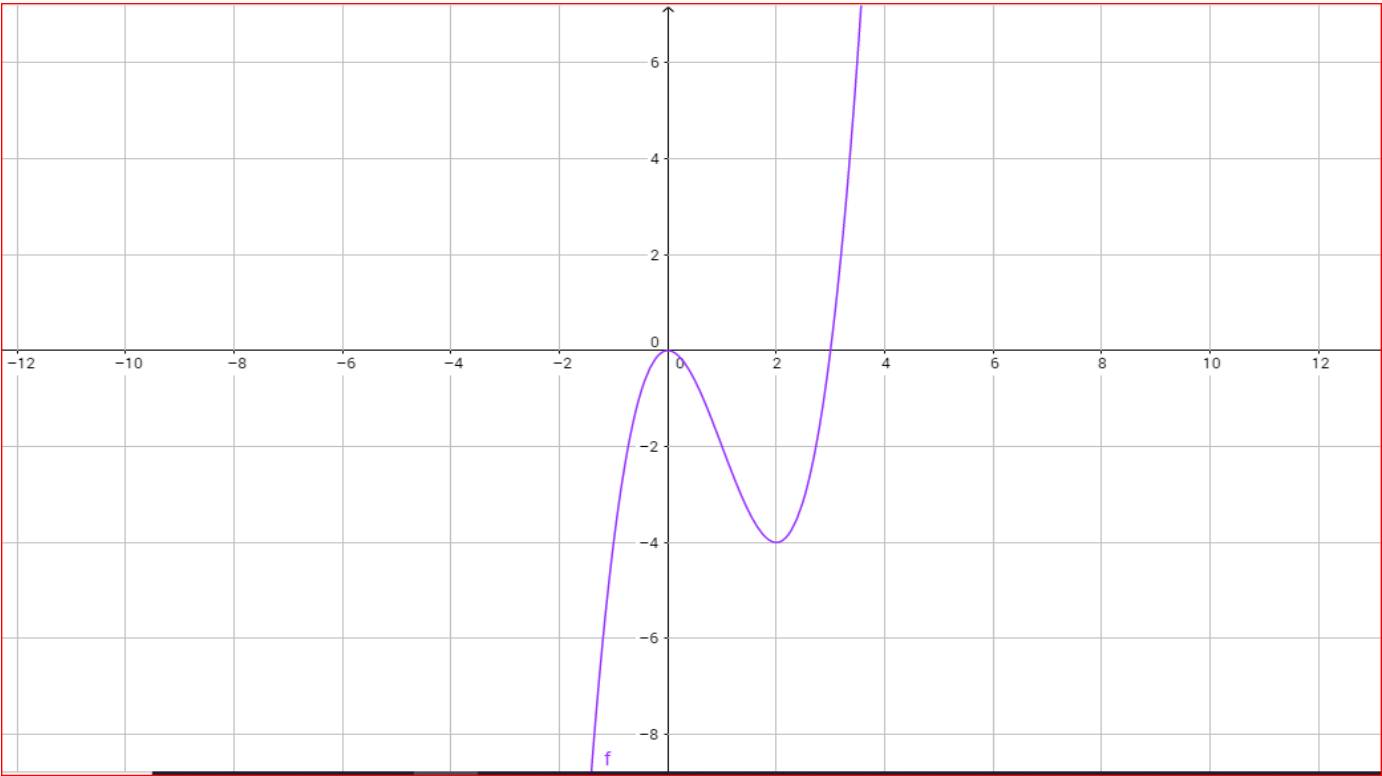


Si es inyectiva

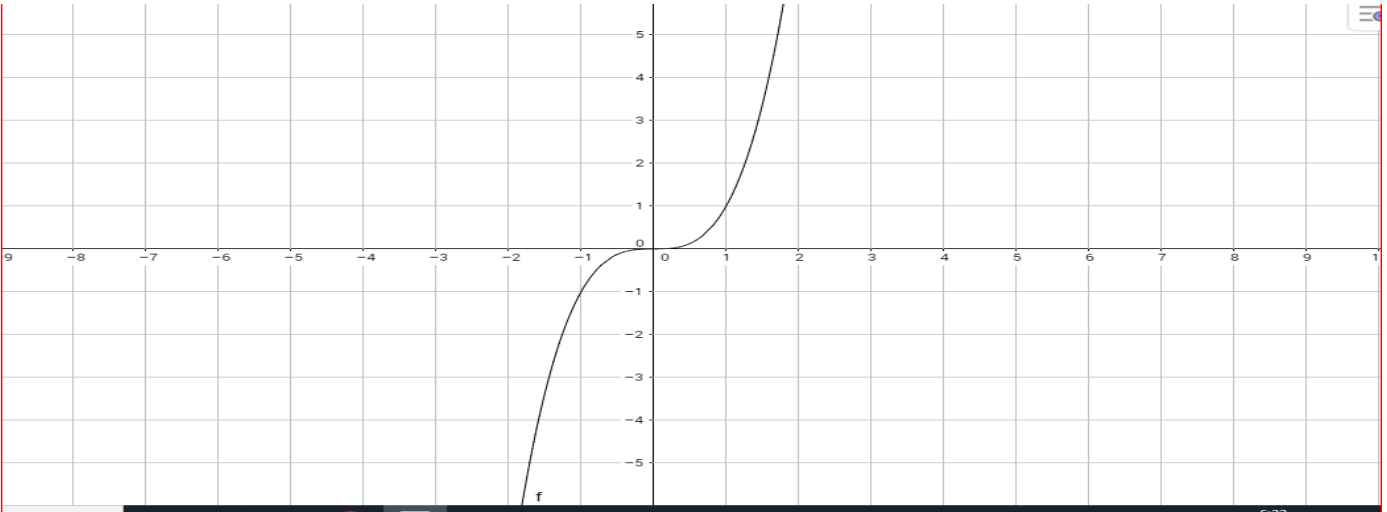
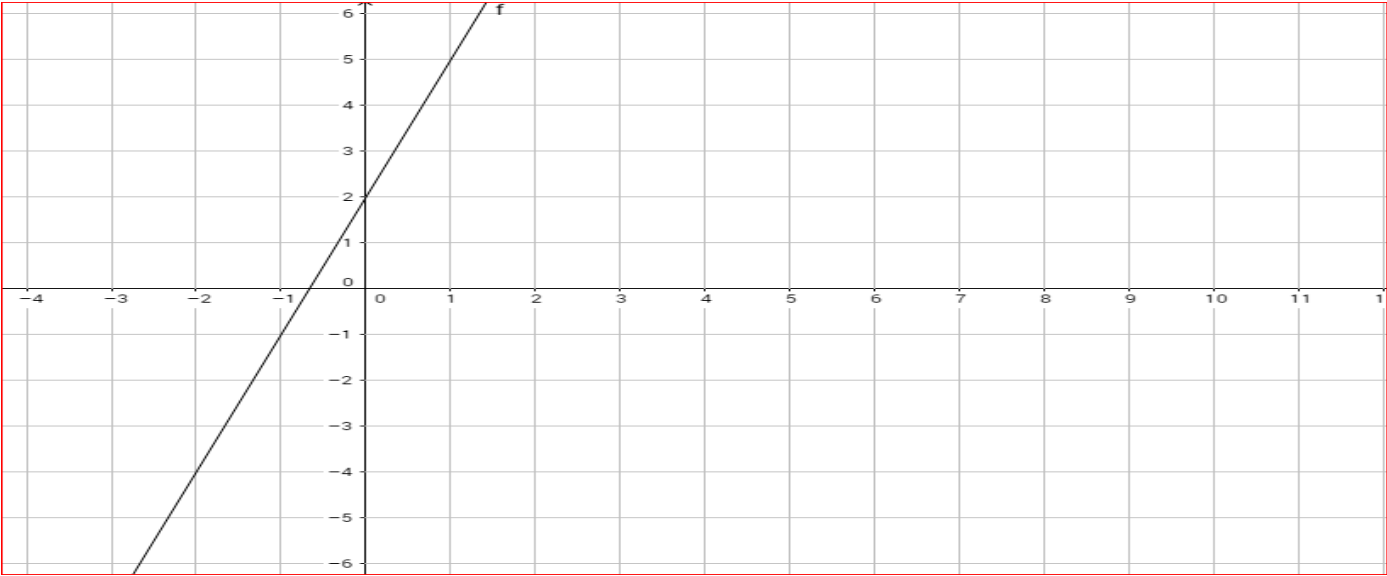
Funcion Inyectiva



Funcion Sobreyectiva



Funciones Biyectivas



## Ejercicios de Funciones

1) Construir una tabla de valores para cada una de las siguientes funciones:

a)  $y = 3x + 2$

b)  $f(x) = 2x$

c)  $y = x^2 - 4$

d)  $f(x) = \sqrt{x}$

Completar la siguiente tabla (obsérvese el primer ejemplo):

| Función expresada mediante un enunciado                                                        | Función expresada mediante Expresión algebraicas |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| La función que a cada número le asocia su doble                                                | $y = 2x$                                         |
| La función que a cada número le asocia su triple más 5                                         |                                                  |
|                                                                                                | $y = 2x + 1$                                     |
| La función que a cada número le asocia su mitad                                                |                                                  |
| La función que a cada número le asocia su opuesto                                              |                                                  |
|                                                                                                | $y = -x + 2$                                     |
| La función que expresa la distancia recorrida cada hora por un automóvil que circula a 60 km/h |                                                  |
|                                                                                                | $y = x - 2$                                      |
| La función que relaciona el radio de una circunferencia y su perímetro                         |                                                  |
| La función que relaciona el radio de una circunferencia y su área                              |                                                  |

Para cada una de las siguientes funciones, construir una tabla de valores apropiada y dibujar, a continuación, su gráfica:

a)  $y = x + 2$

b)  $f(x) = 2x - 3$

c)  $f(x) = -3x - 1$

d)  $y = x$

e)  $f(x) = 4x - 4$

f)  $y = -x$

g)  $y = 2$

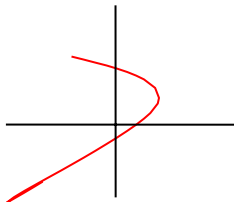
h)  $y = 3x - 6$

i)  $y = -2x$

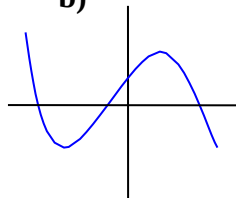
j)  $y = x + 1$

I – ¿Cuáles de estas representaciones corresponden a la gráfica de una función? (Razonar la respuesta):

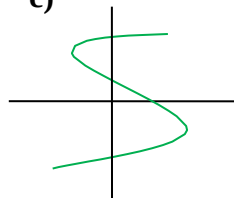
a)



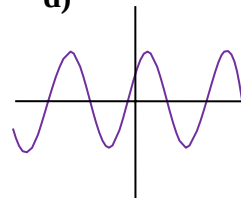
b)



c)



d)



II – Una compañía de telefonía móvil cobra a sus clientes una cantidad fija al mes de 10 dólares más 0.1 dólar por cada minuto de llamada. Construir una tabla que relacione el tiempo consumido y el coste de la factura. ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente? Expresar algebraicamente la función correspondiente.

III – Un estudio de un ginecólogo muestra cómo crece un bebé antes de nacer según el mes de gestación en que se encuentre su madre, de acuerdo con la siguiente tabla:

| Edad (meses)  | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|---------------|---|---|----|----|----|----|----|----|
| Longitud (cm) | 4 | 8 | 15 | 24 | 29 | 34 | 38 | 42 |

Representar la función "longitud" en función de la edad del bebé. Comentar dicha gráfica.

**Resuelva lo siguientes problemas atendiendo a sus indicaciones:**

1) Una fábrica de bolígrafos calcula el coste de fabricación (en euros) mediante la siguiente función:

$$f(x) = 10 + 3\sqrt{x} \quad \text{siendo } 1 \leq x \leq 1600 \text{ el número de unidades.}$$

- a) ¿Cuánto cuesta un pedido de 9 bolígrafos? ¿Y uno de 100? ¿Y uno de 1600?
- b) ¿Cuál es el precio de cada bolígrafo en cada uno de los pedidos anteriores?
- c) Construir un grafico del coste de bolígrafo en función de las unidades solicitada.

## Funciones Cuadrática o de Segundo Grado

Una **función polinomial** es una función que está definida por una expresión con polinomios.

Entonces una función polinomial de grado  $n$  es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Ya hemos estudiado funciones polinomiales de grados 0 y 1. Éstas son funciones de la forma

$$P(x) = a_0 \text{ y } P(x) = a_1 x + a_0, \text{ respectivamente, cuyas gráficas son rectas.}$$

En esta sección estudiamos funciones de grado 2 que reciben el nombre de funciones cuadráticas.

### Funciones Cuadráticas:

Una función cuadrática es una función polinomial de grado 2. Entonces, una función cuadrática es una función de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , donde  $a \neq 0$

El gráfico de una función cuadrática es una **cónica** (círculo, elipse, parábola o hipérbola), pero en esta sección resolveremos funciones cuadráticas de **parábolas** únicamente.

El gráfico de  $f(x) = x^2$  (es la función cuadrática más simple), permite observar algunas características de las parábolas. Entre otras cosas,  $f(0) = 0$  y  $f(x) > 0$  para cualquier otro valor real de  $x$ . Por lo tanto, la función tiene un mínimo en el punto  $(0, 0)$ , que se llama la cumbre de la parábola.

La orientación de la parábola depende del signo de  $a$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } a > 0 \text{ ramas hacia arriba} \rightarrow \text{función cóncava} \\ \text{Si } a < 0 \text{ ramas hacia abajo} \rightarrow \text{función convexa} \end{array} \right\}$$

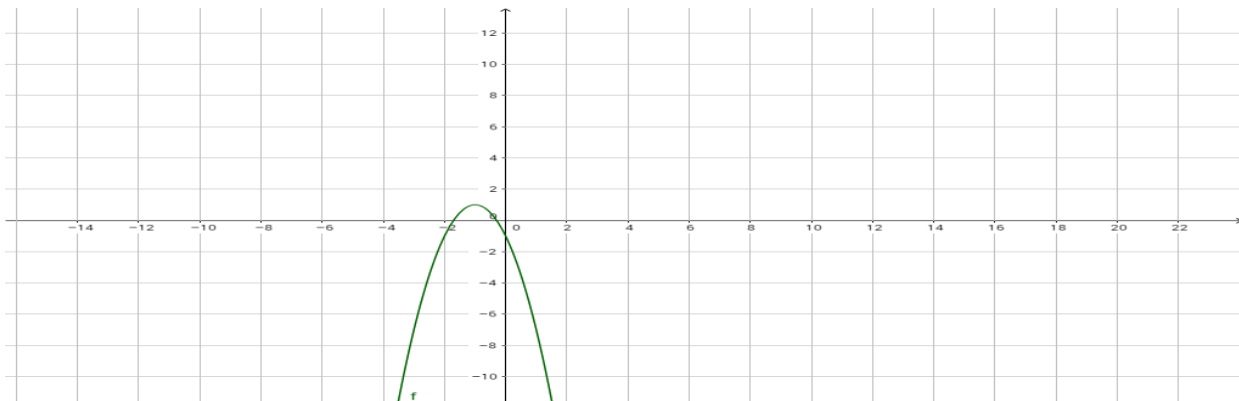
$$y = 2x^2 - 4x - 1$$

Como  $2 > 0$  La parábola abre hacia arriba

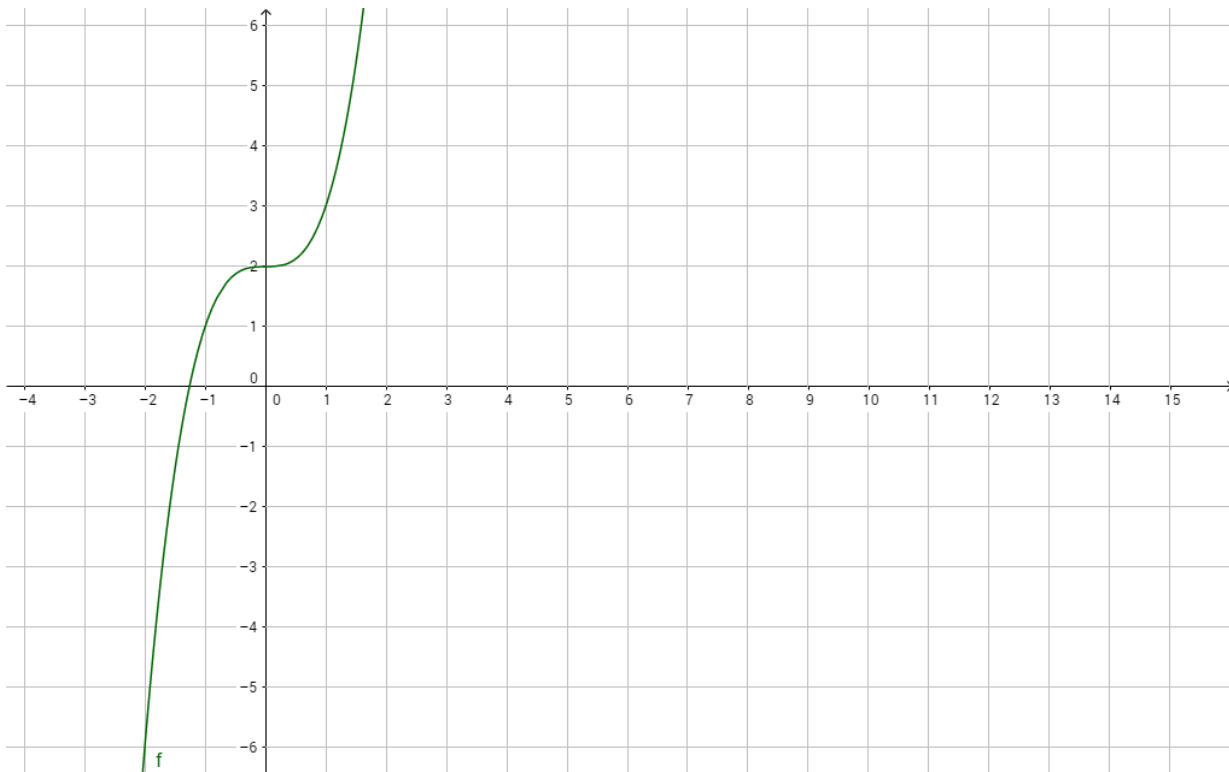


$$y = -2x^2 - 4x - 1$$

Como  $-2 < 0$  La parábola abre hacia abajo



$$y = x^3 + 2$$



### Eje de Simetría:

El eje de simetría es una recta vertical que pasa por el vértice y divide la parábola en dos partes iguales.

Su ecuación es  $x = h$

El eje de simetría viene dado por la recta  $x = \frac{-b}{2a}$

El vértice de la parábola tiene por abscisa  $x_0 = \frac{-b}{2a}$

La ordenada la determinaremos sustituyendo este valor de  $x_0$  en la función.

Los puntos de corte con el eje de abscisas vienen dados por las dos soluciones de la ecuación de segundo grado

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Son:  $(x_1, 0)$  y  $(x_2, 0)$

El punto de corte con el eje de ordenadas viene dado por el punto  $(0, c)$ .

### Cálculo de las coordenadas del vértice, el Máximo o el Mínimo de una Parábola.

El vértice de una parábola puede ser máximo si la concavidad es hacia abajo y mínimo cuando la concavidad es hacia arriba. Para obtener estos vértices usaremos las siguientes fórmulas:

Las coordenadas del vértice vienen dadas por  $V(h, k)$  donde  $h$  representa el eje de las abscisas o eje  $x$  y  $k$  el eje de las ordenadas o eje  $y$ .

Así;  $h = \frac{-b}{2a}$  y  $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$  entonces;  $v(h, k) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$



## ¿Cómo resolver y representar una función cuadrática?

Hay dos métodos para resolver y representar una función cuadrática. A continuación, detallamos los pasos de cada uno de ellos:

### Fórmula del vértice:

1) Encontrar los valores de **a**, **b**, **c**.

2) Encontrar el valor (**x**) del vértice con la fórmula del vértice.

3) Hallar el valor de (**y**) sustituyendo el valor de **x**

4) Escribir las coordenadas (**x**, **y**).

A) Resuelve y representa las siguientes funciones cuadráticas

$$y = -x^2 + 4x - 3$$

### 1) Aplicamos la fórmula del vértice

$$v(h, k) = \left( \frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

$$v(h, k) = \left( \frac{-4}{2(-1)}, \frac{4(-1)(-3) - (4)^2}{4(-1)} \right)$$

$$v(h, k) = \left( \frac{-4}{-2}, \frac{12 - 16}{-4} \right)$$

$$v(h, k) = \left( \frac{-4}{-2}, \frac{-4}{-4} \right)$$

$$v(h, k) = (2, 1)$$

Así, el vértice es (2, 1)

### 2) Puntos de corte con el eje OX

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{(4)^2 - 4(-1)(-3)}}{2(-1)}$$

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{16 - 12}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{4}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 2}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-2}{-2}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{(4)^2 - 4(-1)(-3)}}{2(-1)}$$

$$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{16 - 12}}{-2}$$

$$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{4}}{-2}$$

$$x_2 = \frac{-4 - 2}{-2}$$

$$x_2 = \frac{-6}{-2}$$

$$x_2 = 3$$

Obtenemos las soluciones  $x = 3, x = 1$

Así, las intersecciones con el eje OX son (1, 0) y (3, 0)

### 3) Punto de corte con el eje OY

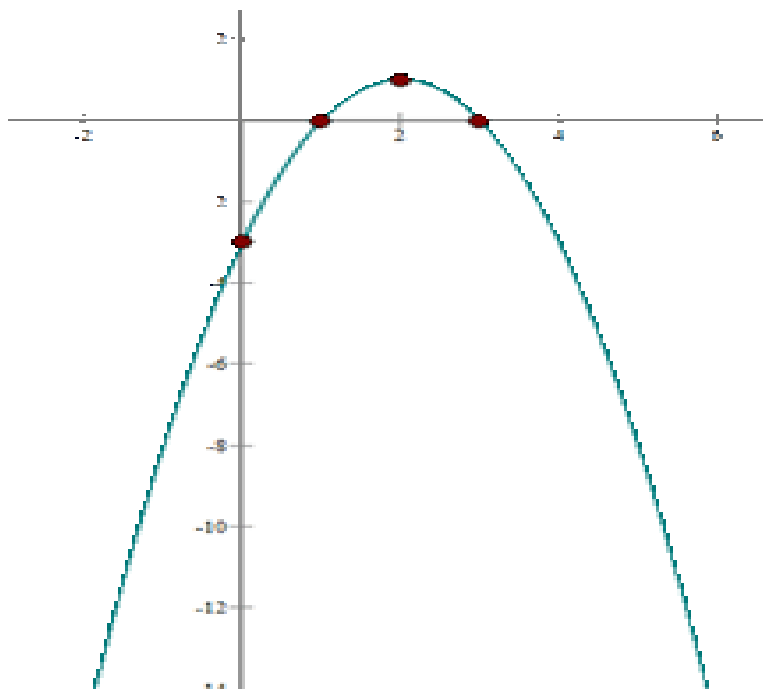
$$x = 0 \Rightarrow y = -3$$

Así, la intersección con el eje OY es (0, -3)

4) Con los datos anteriores, la representación gráfica es

$$y = -x^2 + 4x - 3$$

|   |     |    |    |   |   |   |    |    |
|---|-----|----|----|---|---|---|----|----|
| X | -2  | -1 | 0  | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  |
| Y | -15 | -8 | -3 | 0 | 1 | 0 | -3 | -8 |



**B)** Resuelve y representa las siguientes funciones cuadráticas

$$y = x^2 + 2x + 1$$

1) Vértice

Aplicamos la fórmula del vértice

$$\left( -\frac{2}{2(1)}, 1 - \frac{2^2}{4(1)} \right) = (-1, 0)$$

$$v(h, k) = (-1, 0)$$

Así, el vértice es (2, 1)

2) Puntos de corte con el eje OX

Igualemos la función a cero y calculamos sus soluciones

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-2 \pm 0}{2}$$

Obtenemos la solución  $x = -1$

Así, las intersecciones con el eje OX es  $(-1, 0)$

3) Punto de corte con el eje OY

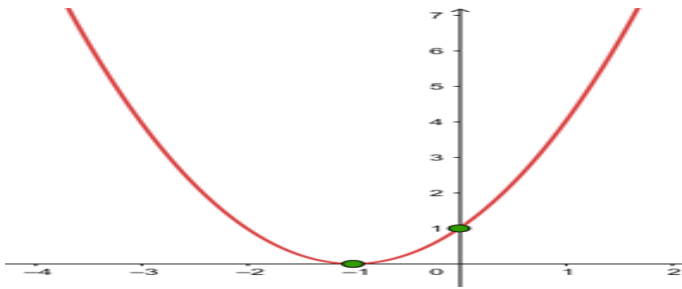
$$x = 0 \implies y = 1$$

Así, la intersección con el eje OY es  $(0, 1)$

4) Con los datos anteriores, la representación gráfica es

$$y = x^2 + 2x + 1$$

|   |    |    |    |    |   |    |    |
|---|----|----|----|----|---|----|----|
| X | -4 | -3 | -2 | -1 | 2 | 3  | 4  |
| Y | 9  | 4  | 1  | 0  | 9 | 16 | 25 |



### Ejercicios:

Resuelva y represente las siguientes funciones cuadráticas

$$y = x^2 + 4x + 1$$

$$y = x^2 + x - 7$$

$$y = x^2 - 6x + 5$$

$$y = -x^2 - 6x + 12$$