



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE SANTIAGO, UTESA
SISTEMA CORPORATIVO
Reforma del presente con visión de futuro
“Educando Para el Desarrollo Sociocultural”
SEDE – Santiago
Departamento de Matemática
Pre – Calculo Mat 160
Profesor: Francisco Antonio Rodríguez Abreu M. A.

Segunda Clase de Pre – Calculo

La Radicación

1) Un terreno cuadrado tiene una superficie de $1,369 \text{ m}^2$ y se quiere rodear completamente con una valla ¿Cuántos metros de valla se necesitan para rodear el terreno?

2) Una biblioteca tiene 49 metros de largo y 36 metros de ancho. Si se va a construir otra sala en forma cuadrada y con la misma área ¿Cuánto medirá su perímetro?

En general se llama **Raíz de índice n de un número A** , o raíz n – ésima de A , a otro número B , de manera que al elevarlo a n (índice) nos dé el valor del radicando A .

$$\sqrt[n]{A} = B \quad \text{si se cumple que } B^n = A$$

Donde a:

↪ $\sqrt[n]{A}$ se llama **radical**.

↪ n se le llama **índice** del radical con $n \geq 2$; $n \in \mathbb{N}$

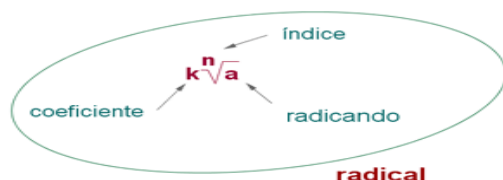
↪ A se le llama **radicando**

↪ B la **raíz** n – ésima

Los radicales nacen por la necesidad de quitarle el exponente a una expresión

$\sqrt[n]{a}$; radical de n ésima raíz

Un **radical** es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$, en la que $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$. Además, si n es par, entonces (**a**) no puede ser negativo ($a \geq 0$)



Partes de un radical

Observaciones

Todo número real positivo tiene dos raíces de igual índice, una positiva y otra negativa: $\sqrt{9} = \pm 3$ porque $3^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$

Entonces representaremos por: $\sqrt[n]{a}$ la raíz positiva y $-\sqrt[n]{a}$ la raíz negativa.

NO EXISTE LA RAÍZ DE ÍNDICE PAR DE NÚMEROS NEGATIVOS, ya que cualquier número elevado a una potencia par es siempre positivo.

Las raíces de índice impar existen siempre, para cualquier número, y tienen el mismo signo del radicando. Es decir, la raíz de índice impar de un número negativo es negativa y la raíz de índice impar de un número positivo es positiva

Un **radical** es por tanto una raíz indicada, sin resolver, y representa el valor exacto del número real, sin errores. Entonces, por ejemplo, a partir de la definición podemos calcular las siguientes raíces:

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

por que $2^3 = 8$

$$\sqrt[4]{81} = 3$$

por que $3^4 = 81$

$$a) \sqrt[3]{-125} =$$

$$b) \sqrt[5]{-32} =$$

$$c) \sqrt{64} =$$

$$d) \sqrt[3]{-64} =$$

$$e) \sqrt[4]{64} =$$

$$f) \sqrt{-25} =$$

$$g) \sqrt[4]{-16} =$$

$$h) \sqrt[6]{-64} =$$

$$i) \sqrt[3]{-729} =$$

$$j) \sqrt[5]{-343} =$$

$$k) \sqrt[3]{-8} =$$

$$l) \sqrt{121} =$$

$$m) \sqrt[3]{7^3} =$$

$$n) \sqrt[5]{8^5} =$$

$$o) \sqrt[9]{13^9} =$$

$$p) \sqrt[7]{2^{21}} =$$

$$q) \sqrt[7]{(-5)^7} =$$

$$r) \sqrt[5]{243} =$$

$$s) \sqrt[4]{625} =$$

$$t) \sqrt{-169} =$$

$$u) \sqrt[4]{256} =$$

Se puede expresar un **radical** en forma de **potencia**:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

El índice del radical (2) se transforma en el denominador y el exponente del radicando (8) en el numerador y efectuamos las operaciones:

$$\sqrt{256} = \sqrt{2^8} = 2^{8/2} = 2^4 = 16$$

Raíces Principales

Para un número natural n mayor que **1** y **a** un número real cualquiera, se define $\sqrt[n]{a}$ la raíz principal enésima.

Para extraer la raíz principal a un número, se divide el exponente del radicando entre el índice de la raíz

$$1) \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$2) \text{ Si } n = 2 \text{ el índice de la raíz no se marca, se escribe } \sqrt{a} \text{ en lugar de } \sqrt[2]{a}$$

$$3) \sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{1/2} = 3^{2/2} = 3^1 = 3$$

$$4) \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$

$$5) \sqrt[5]{8^4} = 8^{\frac{4}{5}}$$

Expresar en forma de potencia

$$a) \sqrt[3]{2^4} =$$

$$b) \sqrt{48} =$$

$$c) \sqrt{x^{10}} =$$

$$d) \sqrt[4]{3^{12}} =$$

$$e) \sqrt[5]{32^2} =$$

$$f) \sqrt[7]{bc} =$$

$$g) \sqrt{a+b} =$$

Para expresar una potencia con exponente fraccionario a la forma radical, se escribe el denominador como índice del radical y el numerador como exponente del radicando.

Ejemplo

$$a) x^{3/5} = \sqrt[5]{x^3}$$

$$b) m^{7/2} = \sqrt{m^7}$$

$$c) 2^{3/2} = \sqrt{2^3}$$

$$d) x^{1/5} =$$

$$e) a^{5/7} =$$

$$f) 3y^{3/8} =$$

$$\text{Comprobar que } 4^{1/2} + 9^{1/2} = \sqrt{4} + \sqrt{9} \neq \sqrt{4+9}$$

Propiedades de las raíces

Las **propiedades de los radicales** nos permiten trabajar con ellos para intentar resolver operaciones con radicales que, a priori, parece difícil encontrar la solución. Estas **propiedades de las raíces** también nos sirven para simplificar los radicales al máximo, y reducirlos hasta que ofrezcan una forma más sencilla.

1) Producto de raíces

La **raíz de un producto** es igual al producto de la raíz de cada uno de los factores.

$$a) \sqrt[n]{a \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{c}$$

$$b) \sqrt{(4) \cdot (9)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = (2) \cdot (3) = 6$$

2) Cociente de radicales

La **división de radicales** es igual a la raíz del numerador entre la raíz del denominador.

$$a) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$b) \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$$

Raíz de un radical

La **raíz de una raíz** da lugar a otro radical cuyo índice es igual a la multiplicación de los índices de cada uno de los radicales.

$$a) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$b) \sqrt[3]{\sqrt[4]{4,096}} = {}^{(3) \times (4)}\sqrt{4,096} = \sqrt[12]{4,096} = 2$$

Raíz de una potencia

Al contrario que en el caso anterior, la **raíz de una potencia** es igual a otra raíz con un índice que se obtiene de dividir el exponente de la potencia entre índice de la raíz. Si coinciden el índice y el exponente nos quedamos con el número simplificado al máximo.

$$a) \sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a$$

$$b) \sqrt[6]{x^4} = x^{\frac{4}{6}} = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$$

Potencia de un radical

La **potencia de una raíz** es igual al radical de ese número elevado a la potencia que se elevaba el conjunto del radical.

$$a) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$b) (\sqrt[3]{x})^5 = \sqrt[3]{x^5}$$

Simplificación de radicales

Si existe un **número natural** que divida al **índice** y al **exponente** (o los exponentes) del radicando, se obtiene un **radical simplificado**.

Para **simplificar** un radical simplificando el índice y los exponentes, basta con dividir tanto el índice del radical como los exponentes de las potencias que haya en el **radicando** entre su máximo común divisor (M.C.D.)

Ejemplo

Escribe en forma simplificada

$$a) \sqrt[5]{(3x^2y)^5} = (3x^2y)^{5/5} = (3x^2y)$$

$$b) \sqrt[3]{\frac{x}{8}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{2}$$

$$c) \sqrt{50} = \sqrt{(25)(2)} = 5\sqrt{2}$$

$$d) \sqrt{25x^4z^8} = 5x^2z^4$$

$$e) \sqrt{12x^3y^5} = \sqrt{(4)(3)x^2xy^4y} = 2xy^2\sqrt{3xy}$$

$$f) \sqrt[4]{3^4b^8} = 3b^2$$

$$g) \sqrt[12]{c^9d^3} = c^{9/12}d^{3/12} = c^{3/4}d^{1/4} = \sqrt[4]{c^3d}$$

Radicales semejantes

Dos o más radicales son semejantes cuando tienen el mismo índice e iguales radicando; pudiendo tener diferentes los factores externos al radicando

a) $\sqrt{3}$ y $8\sqrt{3}$ Son semejantes

b) $4a\sqrt[3]{2b}$ y $\sqrt[3]{2b}$ Son semejantes

Para poder asegurar que dos o más radicales son semejante, conviene simplificarlo antes y sacar factores fuera del radical.

Ejemplo

a) $4\sqrt{3}$ y $\sqrt{75}$ Simplificando raíz de 75

$$\sqrt{75} = \sqrt{(25)(3)} = 5\sqrt{3} \quad \text{Si son semejantes}$$

Reducción de Radicales semejantes

Para reducir radicales semejantes, se suman o se restan los coeficientes de los radicales y se escribe el mismo radicando

Ejemplo

a) $4\sqrt{3} + 7\sqrt{3} = (4 + 7)\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$

b) $9\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = (9 + 8 - 5)\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

c) $9\sqrt[3]{7} + 8\sqrt[3]{7} - 5\sqrt[3]{7} = (9 + 8 - 5)\sqrt[3]{7} = 12\sqrt[3]{7}$

d) $3\sqrt{x} - 6\sqrt{x} + 12\sqrt{x} = (3 - 6 + 12)\sqrt{x} = 9\sqrt{x}$

e) $3\sqrt[5]{2x^2y} - 8\sqrt[5]{2x^2y} = (3 - 8)\sqrt[5]{2x^2y} = -5\sqrt[5]{2x^2y}$

f) $\sqrt{98} + \sqrt{2} - \sqrt{50} + \sqrt{48} - \sqrt{32}$

La Radicación (Continuación)

Operaciones con radicales

Adición y Sustracción de radicales

Solo se pueden sumar (o restar) dos o más radicales cuando son **radicales semejantes**, es decir, si son **radicales** con el **mismo índice** e **igual radicando**.

Para sumar o restar radicales con el mismo índice e igual radicando se suman o se restan los coeficientes de los radicales y se escribe la misma parte radical.

Ejemplo

Sumar los siguientes radicales

a) $8\sqrt{2}; 6\sqrt{2}; 7\sqrt{2}$ Como son semejantes, se suman los coeficientes y se escribe la misma parte radical

$$8\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 21\sqrt{2}$$

b) $5\sqrt{b}; -8\sqrt{2}; 2\sqrt{b}; 5\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \sqrt{b}$ Agrupamos los que sean semejantes

$$\{5\sqrt{b} + 2\sqrt{b} + \sqrt{b}\} + \{-8\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2}\} =$$

$$\{5 + 2 + 1\}\sqrt{b} + \{-8 + 5 - 1\}\sqrt{2} = 8\sqrt{b} - 4\sqrt{2}$$

Nota: Si es una sustracción, recordar que al minuendo se le suma el opuesto del sustraendo

Ejemplo

De $8\sqrt{2} - \sqrt{b}$ Restar $3\sqrt{2} + 3\sqrt{b} - \sqrt{c}$

$$\{8\sqrt{2} - \sqrt{b}\} + \{-3\sqrt{2} - 3\sqrt{b} + \sqrt{c}\} =$$

$$8\sqrt{2} - \sqrt{b} - 3\sqrt{2} - 3\sqrt{b} + \sqrt{c} = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{b} + \sqrt{c}$$

Realice las operaciones de adición y sustracción de radicales (**Recuerden simplificar donde sea necesario**)

a) $6\sqrt{2} + \sqrt{2} =$

b) $\sqrt{75} + 2\sqrt{3} = \sqrt{(25)(3)} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

c) $\sqrt{50} + 4\sqrt{2} =$

d) $2\sqrt{98} + 4\sqrt{18} - \sqrt{32} =$

e) $\sqrt{96} - \sqrt{159} + 2\sqrt{54} =$

Multiplicación de radicales del mismo índice

Se escribe el mismo radical y se multiplican los radicandos. Si es posible se simplifica.

Ejemplo

$$a) (\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5}) = \sqrt{10}$$

$$b) (\sqrt{8}) \cdot (\sqrt{2}) = \sqrt{16} = 4$$

$$c) (\sqrt[3]{9})(\sqrt[3]{3}) = \sqrt[3]{(9)(3)} = \sqrt[3]{27} = 3$$

Ejercicios

Realizar las siguientes multiplicaciones de radicales

$$1) \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} =$$

$$2) \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} =$$

$$3) \sqrt{7} \cdot \sqrt{14} =$$

$$4) 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{10} =$$

$$5) 2\sqrt{11} \cdot 3\sqrt{11} =$$

$$6) \sqrt{27} \cdot \sqrt{3} =$$

$$7) \sqrt{2} (\sqrt{10} - 3) =$$

$$8) (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{2} - \sqrt{3}) =$$

División de radicales del mismo índice de la raíz

Para dividir radicales con el mismo índice **se dividen los radicandos y se deja el mismo índice.**

$$a) \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$b) \sqrt[3]{8} \div \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5}$$

$$c) \sqrt{36} \div \sqrt{4} = \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9} = 3$$

$$d) 3\sqrt{5} \div 2\sqrt{7} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{7}}$$

Ejercicios

$$e) 3\sqrt{11} \div 2\sqrt{3} =$$

$$f) \sqrt{8} \div \sqrt{2} =$$

$$g) 5\sqrt[3]{6} \div \sqrt[3]{4} =$$

$$h) \sqrt[4]{4} \div \sqrt[4]{8} =$$

$$i) 6\sqrt[3]{72} \div 2\sqrt[3]{9} =$$

$$j) \frac{3}{4} \sqrt[3]{\frac{3}{16}} \div \frac{3}{5} \sqrt[3]{\frac{2}{5}} =$$

Potencia de un radical

Para potenciar un radical basta con elevar a la potencia el radicando

Ejemplo

$$a) (\sqrt{9})^2 = \sqrt{9^2} = \sqrt{81} = 9$$

$$b) (\sqrt[3]{8})^2 = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$c) (\sqrt[n]{y})^p = \sqrt[n]{y^p}$$

$$d) (\sqrt[3]{ab^3})^4 = \sqrt[3]{(ab^3)^4} = \sqrt[3]{a^4b^{12}} = \sqrt[3]{a^3ab^{12}} = ab^4 \sqrt[3]{a}$$

Ejercicios

$$e) (x\sqrt{2})^2 =$$

$$f) (x\sqrt{a})^3$$

$$g) (5\sqrt{x^2y})^3 =$$

$$h) (2\sqrt{5})^2 =$$

$$i) 5(\sqrt[5]{2})^4 =$$

$$j) (4\sqrt{2})^6 =$$

$$k) (-2\sqrt{6})^2 =$$

Raíz de un Radical

Es igual a la raíz del mismo radicando cuyo índice de la raíz es el producto de los índices de los radicales

$$a) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$b) \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$$

$$c) \sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[2 \cdot 3]{729} = \sqrt[6]{729} = 3$$

$$d) \sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt[4]{5}$$

Ejercicio

Determine la raíz

$$e) \sqrt[5]{\sqrt{32}} =$$

$$f) \sqrt{\sqrt[5]{32}} =$$

$$g) \sqrt[6]{\sqrt{72}} =$$

$$h) \sqrt{\sqrt[4]{64}} =$$

$$i) \sqrt[4]{\sqrt[3]{4,096}} =$$

$$j) \sqrt[4]{\sqrt{6,561}} =$$

Racionalización de denominadores

Consiste en eliminar el radical del denominador

Racionalización del tipo $\frac{a}{b\sqrt{c}}$; Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{c}$

$$1) \frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b\sqrt{c} \cdot \sqrt{c}} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b(\sqrt{c})^2} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b \cdot c}$$

$$2) \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3) \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$4) \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}$$

Ejercicio

Racionalizar el denominador

$$5) 6 \sqrt{\frac{1}{15}} =$$

$$6) 4 \sqrt[3]{\frac{1}{15}} =$$

$$7) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8}{3}} =$$

$$8) \sqrt[3]{\frac{1}{b^2}} =$$

$$9) \sqrt{\frac{1}{x}} =$$

$$10) \sqrt{\frac{2}{5}} =$$

$$11) \sqrt[6]{\frac{1}{4}} =$$

$$12) \frac{1}{\sqrt{5}} =$$

$$13) \frac{1}{\sqrt{5}} =$$

$$14) \frac{5x}{\sqrt{2x}} =$$

$$15) \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} =$$

$$16) 9 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} =$$

$$17) \frac{12x^2}{\sqrt{6x}} =$$

Racionalización cuando el denominador consta de dos términos, donde por lo menos uno de ellos es irracional

Para racionalizar el denominador de una fracción que consta de un binomio hay que multiplicar al numerador y denominador de la fracción por el conjugado del denominador.

Se llama conjugado de un binomio a otro binomio igual al primero, pero con la diferencia de que el signo del segundo término es opuesto al que tenía antes:

Ejemplos:

El conjugado de $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ es $\sqrt{5} + \sqrt{3}$

El conjugado de $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ es $\sqrt{5} - \sqrt{3}$

El conjugado de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ es $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

Nota: El producto notable: **suma de dos números por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados.**

El cuadrado de cualquier cantidad bajo una raíz cuadrada equivale a quitar el radical y dejar solo al

radicando: $(\sqrt{3})^2 = 3$

Ejemplo:

$$\text{a) } \frac{a}{2-\sqrt{3}} = \frac{a(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{a(2+\sqrt{3})}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{a(2+\sqrt{3})}{4-3} = \frac{a(2+\sqrt{3})}{1} = a(2 + \sqrt{3})$$

$$\text{b) } \frac{3}{2+\sqrt{3}} = \frac{3(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{6-3\sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{6-3\sqrt{3}}{4-3} = 6 - 3\sqrt{3}$$

$$\text{c) } \frac{7}{\sqrt{8}-2} =$$

$$\text{d) } \frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} =$$

$$\text{e) } \frac{3-3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} =$$

Ejercicios de aplicación de la radicación

- 1) Una caja en forma cúbica tiene un volumen de 21952 cm^3 . Si se corta la mitad superior, ¿cuáles serán las dimensiones del recipiente resultante?
- 2) Se compra cierto número de bolígrafos por 289 pesos. Sabiendo que el precio de un bolígrafo coincide con el número de bolígrafos comprados, ¿cuál es el precio de un bolígrafo?
- 3) Se quieren distribuir los 729 alumnos de una escuela formando un cuadrado. ¿Cuántos alumnos habrá en cada lado del cuadrado?
- 4) ¿Cuáles son las dimensiones de un terreno rectangular de $1,323 \text{ m}^2$ si su longitud es triple que su ancho?
- 5) Un terreno cuadrado tiene una superficie de $3,249 \text{ m}^2$ y se quiere rodear con una valla que cuesta \$3.50 cada metro. ¿Cuánto cuesta la obra?
- 6) Un comerciante ha comprado cierto número de pantalones por 256 dólares. Sabiendo que el número de pantalones coincide con el precio de cada pantalón, ¿cuántos pantalones compró?
- 7) Un terreno cuadrado tiene una superficie de $635,04 \text{ m}^2$. ¿cuál es la longitud que tiene la valla que le rodea?
- 8) Una mesa cuadrada tiene una superficie de 841 dm^2 . ¿cuánto mide su lado?
- 9) Un propietario tiene un terreno cuyas dimensiones son 32m de largo por 8m de ancho, y quiere permutarlo por un terreno cuadrado de la misma superficie. ¿Cuál debe de ser el lado del terreno cuadrado?
- 10) Un terreno cuadrado tiene una superficie de 324 m^2 . ¿Cuánto costará cerrarlo si el metro de valla cuesta 380 dólares?